

國立屏東科技大學八十七學年度研究所招生考試 工程數學 試題

1. 一線性彈簧，其彈性係數 $k = 10 \text{ N/m}$ ，將一質量 10 公斤的物體懸吊於彈簧上，若將物體從靜止位置拉下 5 公分，待其靜止後放開，假設沒有阻尼，則其運動 $y(t)$ 之微分方程式為 $10y'' + 10y = 0$ ， $y(0) = 0.05\text{m}$ 與 $y'(0) = 0$ 。請求出 $y(t)$ 。(10%)
2. $f(x, y, z) = \tan x + e^y + \ln(\sec z)$ ， $\mathbf{F}(x, y, z) = \tan x \mathbf{i} + e^y \mathbf{j} + \ln(\sec z) \mathbf{k}$ ，求 (a) $\text{curl}(\text{grad } f(x, y, z))$ (5%) (b) $\text{div}(\text{curl } \mathbf{F}(x, y, z))$ 。(5%)
3. 將函數 $f(x) = \cos^2 x$ ， $0 \leq x \leq 2\pi$ ，展開成 Fourier 級數型式。(10%)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. 求矩陣 A 之 (a)特徵值(eigenvalues) (5%) (b)特徵向量(eigenvectors)。(5%)
5. 求矩陣 B 之反矩陣 B^{-1} 。(15%)
6. 一遊艇，人員加艇重為 1000 公斤。假設引擎的推力為 500 牛頓(Newtons; N)，而水阻力 R 正比例於速度 v ，亦即 $R = kv$ ，其中 $k = 10 \text{ N sec/m}$ 。利用牛頓第二定理 (質量 $\times$ 加速度 = 受力) 建立 $v(t)$ 的微分方程式。若 $v(0) = 0$ ，請求出 $v(t)$ 。(15%)
7. 起始值問題 $\frac{d^2 x}{dt^2} + 4x = f(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 1 \\ 1 & \text{if } t \geq 1 \end{cases}$ ， $x(0) = \frac{dx}{dt}(0) = 0$ ；求 $x(t)$ 。(15%)

8. Fourier 轉換, Fourier 反轉換與 Fourier convolution 分別定義為

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \quad \text{與}$$

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) g(x-p) dp. \quad \text{請解熱方程式} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty); \quad u(x, t) \rightarrow 0, \quad u_x(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty, t \geq 0.$$

請將答案寫成 convolution 型式(只對一個變數積分)。(15%)

$$\text{提示: } h(x) = e^{-ax^2} \quad \hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a};$$

$$k(x) = f * g(x) \quad \hat{k}(\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega).$$