

1. 解一階微分方程式 $\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2}Q = 6$, $Q(0) = 0$ 。 (10%)
2. 高斯消去法(Gauss elimination)普遍用於線性方程式系統(linear systems of

equations)與行列式值求解。試求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ 之值。 (10%)

3. 試求矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 之特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors)。 (10%)
4. 一固定直角座標系統 $(x \ y \ z)$ 上有四個點 $P_0(0 \ 0 \ 0)$, $P_1(1 \ 1 \ 0)$, $P_2(0 \ 1 \ 1)$, $P_3(1 \ 0 \ 1)$, 將任意兩點以一直線線段相連, 可組成一個四面體, 試求此四面體的體積(提示: 角錐為角柱體積的 $1/3$)。 (10%)
5. 解二階微分方程式 $m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = \cos w t$ ($w \neq \sqrt{k/m}$) 之通解(general solution), 其中 m , k 與 w 為固定之常數。 (20%)
6. 解二階微分方程式 $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = r(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} = 1 - u(t-1)$, 起始條件為 $y(0) = 0$ 和 $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$, 其中 $u(t)$ 為單位步階函數(unit step function), (20%)
7. 一函數 $f(x)$ 稱之為週期性函數, 若它是定義於所有實數 x , 而且對於所有 x , 若有某正數 p 使得 $f(x) = f(x+p)$; $f(x)$ 之週期(period)為最小值之 p 。週期性函數可展開成 Fourier 級數 $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{np}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{np}{L}x\right) \right]$, $-L < x < L$, 函數的週期 $p = 2L$ 。試求函數 $f(x) = \cos 3x \sin 7x$ 的週期, 併將函數 $f(x)$ 表示成 Fourier 級數的型式。 (20%)