

1. 解一階微分方程式  $\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{2}Q = 6$  ,  $Q(0) = 0$  。 (10%)

2. 高斯消去法(Gauss elimination)普遍用於線性方程式系統(linear systems of

equations)與行列式值求解。試求行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$  之值。 (10%)

3. 試求矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  之特徵值(eigenvalues)與特徵向量(eigenvectors)。 (10%)

4. 一固定直角座標系統  $(x \ y \ z)$  上有四個點  $P_0(0 \ 0 \ 0)$ ,  $P_1(1 \ 1 \ 0)$ ,  $P_2(0 \ 1 \ 1)$ ,  $P_3(1 \ 0 \ 1)$ , 將任意兩點以一直線線段相連, 可組成一個四面體, 試求此四面體的體積(提示: 角錐為角柱體積的  $1/3$ )。 (10%)

5. 解二階微分方程式  $m \frac{d^2 y}{dt^2} + k y = \cos w t$  ( $w \neq \sqrt{k/m}$ ) 之通解(general solution), 其中  $m$ ,  $k$  與  $w$  為固定之常數。 (20%)

6. 解二階微分方程式  $\frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 2y = r(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases} = 1 - u(t-1)$ , 起始條件為  $y(0) = 0$  和  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = 0$ , 其中  $u(t)$  為單位步階函數(unit step function)。 (20%)

7. 一函數  $f(x)$  稱之為週期性函數, 若它是定義於所有實數  $x$ , 而且對於所有  $x$ , 若有某正數  $p$  使得  $f(x) = f(x+p)$ ;  $f(x)$  之週期(period)為最小值之  $p$ 。週期性函數可展開成 Fourier 級數  $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{np}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{np}{L}x\right) \right]$ ,  $-L < x < L$ , 函數的週期  $p = 2L$ 。試求函數  $f(x) = \cos 3x \sin 7x$  的週期, 併將函數  $f(x)$  表示成 Fourier 級數的型式。 (20%)