

微積分 試題

每題 10%

1. 定義:若一函數 f 於其義域中某一點 c 之切線斜率為 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$ 。

試依上述定義求函數 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 之導函數 $f'(x)$ 。

2. 定理:若 f 與 g 為 x 的可微分函數, 則 $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 。

試依上述定理說明 $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ 。

3. 若 $y = (x + y)^x$, 求 y' 。

4. 一飛行器以速率 v 飛行時, 其阻力為 $D = av^2 + \frac{b}{v}$, 其中 a 與 b 為正數, (1)試求飛行器以何速率飛行時其阻力 D 為極值, (2)請說明此時阻力為最大或最小阻力。

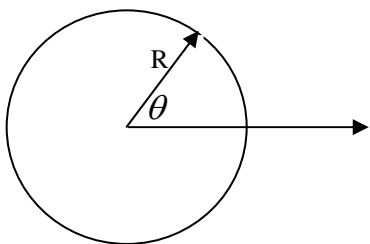
5. 求曲線 $y = x \cot 2x$ 在 $x = \frac{\pi}{8}$ 處的切線方程式。

6. 試計算 $\int_2^4 |x^2 - 5x + 6| dx$ 。

7. 試計算 $\int e^x \cos x dx$ 。

8. 試以積分方式證明底面積為 A 高為 h 的正圓錐體體積為 $\frac{1}{3}Ah$ 。

9. 一特殊設計圓盤半徑為 R , 平面如圖所示, 其厚度 $t(r, \theta) = r|\cos \theta|$, 試求圓盤體積。



10. 泰勒級數 $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \dots$, 試以泰勒級數求 e 至誤差小於 0.005。(註: 請以各項泰勒級數計算結果推論說明, 勿直接與計算機顯示 $e = 2.718281828\dots$ 比較。)