

微積分

【注意：請將題號標示清楚，不需抄題目】

您可能用到的積分公式：

(1). $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, |x| < a, a > 0$

(2). $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, a > 0$

(3). $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, |x| > a > 0$

一、是非題（對的打「○」，錯的打「×」，每題 2 分，共 20 分，答錯不倒扣）

1. 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 且 $f(a) = L$ ，則 $f(x)$ 在 a 點為連續。
2. 函數 $y = x^2$ 的圖形在每一點的斜率都相同。
3. 若 $(x-1)^3$ 是 $f(x)$ 的因式，則 $(x-1)$ 是 $f'(x)$ 的因式。
4. 函數 $f(x) = x^4 + x^2$ 的圖形會對稱於 x 軸。
5. 若 $y = \ln(a)$ ， a 為一常數且 $a > 0$ ，則 $y' = \frac{1}{a}$ 。
6. 若 $f(x)$ 是 n 次多項式，則 $f^{(n)}(x) = 0$ 。
7. 若 $f(x) = x^4$ ，則 $\int f(x) dx = \frac{x^5}{5}$ 。
8. 由函數 $y = x^2 + 1$ ， x 軸及直線 $x = 1$ ， $x = 3$ 所圍成區域之面積為 $\int_1^3 (x^2 + 1) dx$ 。
9. 若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為連續函數，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可積分。
10. 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ ，則 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ 。

二、填充題(每一空格 3 分，共 30 分)

1. 若 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(x-1)$ ，則 $\frac{df}{dx} =$ _____。
2. 若 $f(x) = (\sin(x))(1 + \cos(x))$ ，則 $\frac{df}{dx} =$ _____。
3. 若 $f(x) = 3^{x^2}$ ，則 $\frac{df}{dx} =$ _____。
4. 若 $x = a(\theta - \sin(\theta))$ ， $y = a(1 - \cos(\theta))$ ，而 a 為一常數且 $a \neq 0$ ， $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，則 $\frac{dy}{dx} =$ _____。
5. 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} =$ _____。

微積分

6. 試求 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} =$ _____。
7. 試求 $\int x(x^2 + 2)^2 dx =$ _____。
8. 試求 $\int x e^x dx =$ _____。
9. 試求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx =$ _____。
10. 試求 $\int_0^{\pi} \int_0^x \sin(y) dy dx =$ _____。

三、 計算題(每一題 10 分，共 50 分)

1. 試求平面 $z = 1 - x - y$ 與三個座標平面在第一卦限內所圍成之立體區域之體積。
2. 若 $f(x, y) = \sin(x^2 - xy - y^2) + \cos(x^2 - y^2)$ ，試求 $f_x(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) - f_y(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ 之值。
3. 已知 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ 在 $x = 1$ 與 $x = -3$ 有相對極值，試求 a, b 之值。
4. 試求 $\int \left[\frac{\sqrt{x+1}}{x-3} \right] dx$ 之值 ($x \neq 3$)。
5. 試証 $\int_0^{\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2} \right) dx$ 為發散。